

Chương

2

HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT

1

LŨY THỪA

I. KHÁI NIỆM VỀ LŨY THỪA.

1. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ NGUYÊN.

Cho n là một số nguyên dương.

Với a là số thực tùy ý, lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số a .

$$\textcircled{1} a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad \textcircled{2} a^0 = 1 \quad (a \neq 0) \quad \textcircled{3} a^{-n} = \frac{1}{a^n}; a \neq 0$$

Trong biểu thức a^n , ta gọi a là cơ số, số nguyên n là số mũ.

Chú ý: 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

2. PHƯƠNG TRÌNH $x^n = b$ (SGK).3. CĂN BẬC n .

a. Khái niệm.

Cho số thực b và số nguyên dương n ($n \geq 2$). Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n = b$.

b. Tính chất của căn bậc n .

Từ định nghĩa ta có các tính chất sau:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab} & \textcircled{2} \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0) \\ \textcircled{3} \left(\sqrt[n]{a}\right)^m &= \sqrt[n]{a^m} & \textcircled{4} \sqrt[n]{a^n} &= a \text{ khi } n \text{ lẻ; } \sqrt[n]{a^n} = |a| \text{ khi } n \text{ chẵn} \\ \textcircled{5} \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} &= \sqrt[n \cdot k]{a} \end{aligned}$$

4. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ.

Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Lũy thừa của a

với số mũ r là số a^r xác định bởi $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

5. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ VÔ TỈ (SGK).

II. TÍNH CHẤT CỦA LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC.

Cho a, b là những số thực dương; α, β là những số thực tùy ý. Khi đó, ta có:

$$\textcircled{1} a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$$

$$\textcircled{2} \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$$

$$\textcircled{3} (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$$

$$\textcircled{4} (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$$

$$\textcircled{5} \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta$ khi và chỉ khi $\alpha > \beta$.

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta$ khi và chỉ khi $\alpha < \beta$.

Bài tập.

Cho a, b là những số thực dương. Rút gọn biểu thức:

$$\text{a) } A = a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$$

$$\text{b) } B = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}$$

...HẾT...

2

HÀM SỐ LŨY THỪA

I. KHÁI NIỆM.

Hàm số $y = x^\alpha$ với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

Ví dụ: $y = x, y = x^2, y = \frac{1}{x^4}$ là những hàm số lũy thừa.

Chú ý: tập xác định của hàm số $y = x^\alpha$

- ☐ Với α nguyên dương thì tập xác định là $\mathbb{R}$.
- ☐ Với α nguyên âm hay bằng không thì tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

□ Với α không nguyên thì tập xác định là $(0; +\infty)$.

II. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LŨY THỪA.

Hàm số $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số:

a. $y = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

b. $y = x^\pi \Rightarrow y' = \pi \cdot x^{\pi-1}$

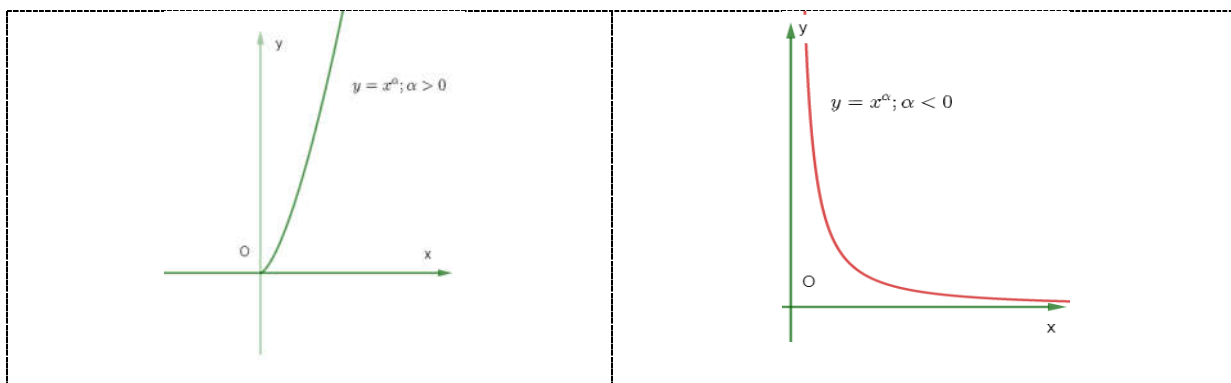
Lưu ý: đạo hàm của hàm hợp đối với hàm số lũy thừa có dạng: $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số:

$$y = (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y' = \frac{2}{3} \cdot (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}-1} \cdot (x^2 - 1)' = \frac{2}{3} \cdot (x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = \frac{4}{3} x \cdot (x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}}$$

III. KHẢO SÁT HÀM SỐ LŨY THỪA $y = x^\alpha$.

$y = x^\alpha, \alpha > 0$	$y = x^\alpha, \alpha < 0$																		
a) Tập khảo sát: $(0; +\infty)$ b) Sự biến thiên: - $y' = \alpha x^{\alpha-1} > 0, \forall x > 0$ - Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$ - Tiệm cận: Không có c) Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table> d) Đồ thị.	x	0	$+\infty$	y'		+	y		$+\infty$	a) Tập khảo sát: $(0; +\infty)$ b) Sự biến thiên: - $y' = \alpha x^{\alpha-1} < 0, \forall x > 0$ - Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$ - Tiệm cận: TCN là Ox, TCD là Oy c) Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>0</td></tr></table> d) Đồ thị.	x	0	$+\infty$	y'		-	y	$+\infty$	0
x	0	$+\infty$																	
y'		+																	
y		$+\infty$																	
x	0	$+\infty$																	
y'		-																	
y	$+\infty$	0																	



Đồ thị hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $(1;1)$.

Chú ý: Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó.

Bài tập:

1. Tìm tập xác định của hàm số:

a) $y = (1-x)^{-\frac{1}{3}}$

b) $y = (x^2 - 1)^{-2021}$

c) $y = (x^2 - x - 2)^{\sqrt{2}}$

d) $y = \left(\frac{x-1}{2x-4} \right)^{2021}$

2. Tính đạo hàm của hàm số:

a) $y = (-x^2 - x + 1)^\pi$

b) $y = (x^2 + 2x)^{\frac{1}{4}}$

3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

a) $y = x^{\frac{4}{3}}$

b) $y = x^{-3}$

...HẾT...

LÔGARIT

I. KHÁI NIỆM LÔGARIT.

1. ĐỊNH NGHĨA.

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$$

Chú ý: không có lôgarit của số âm và số 0.

2. TÍNH CHẤT.

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Ta có tính chất sau đây.

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1 \quad a^{\log_a b} = b \quad \log_a (a^\alpha) = \alpha$$

II. QUY TẮC TÍNH LÔGARIT.

1. LÔGARIT CỦA MỘT TÍCH.

Cho ba số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có: $\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

Mở rộng cho tích của n số dương:

$$\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \dots + \log_a b_n \quad (a, b_1, b_2, \dots, b_n > 0, a \neq 1)$$

2. LÔGARIT CỦA MỘT THƯƠNG.

Cho ba số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có: $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$

Đặc biệt: $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b \quad (a > 0, b > 0, a \neq 1)$

3. LÔGARIT CỦA MỘT LŨY THỪA.

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Với mọi α , ta có: $\log_a (b^\alpha) = \alpha \log_a b$

Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$

III. ĐỔI CƠ SỐ.

Cho ba số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$ ta có: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Đặc biệt: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} (b \neq 1)$; $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b (\alpha \neq 0)$

IV. LÔGARIT THẬP PHÂN. LÔGARIT TỰ NHIÊN.

1. Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10.

$\log_{10} b$ thường được viết là $\log b$ hay $\lg b$.

2. Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e ($e \approx 2,718 > 1$).

$\log_e b$ được viết là $\ln b$.

Bài tập:

1. Không sử dụng máy tính.

a) $\log_2 \frac{1}{8}$

b) $\log_{\frac{1}{4}} 2$

2. Rút gọn biểu thức.

a) $A = \log_3 6 \cdot \log_8 9 \cdot \log_6 2$

b) $B = \log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$

...HẾT...